RODoN

Nauka dowodzenia

rok szkolny 2019/2020

Przedstawiam materiał przygotowany przez zespół:

dr hab. Maciej Borodzik

dr Michał Krych

Regina Pruszyńska

rok szkolny 2019/2020

Celem materiału jest:

- przypomnienie założeń podstawy programowej dotyczących zadań na dowodzenie,
- przypomnienie zasad nauczania dowodzenie,
- doskonalenie umiejętności dowodzenia w różnych kontekstach,
- doskonalenie umiejętności dobierania zadań stosowych do poziomu wiedzy i umiejętności uczniów.

Dowodzenie - cele ogólne

Rozumowanie i argumentacja.

- Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

- Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Treści nauczania

I. Przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:

- dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
- dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

(VR. 3) Dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem.

(VIII. 12) Przeprowadza dowody geometryczne.

Cele nauczania dowodzenia

- Fundamentalne umiejętności matematyczne.
- Rozwijanie umiejętności krytycznego myślenia.
- Odróżnianie poprawnej argumentacji od błędnej.
- Umiejętność rozumowania w życiu codziennym.

Dowody a logika

- *Wprowadźmy formalną logikę do szkół a dzieci nauczą się myśleć logicznie.*
- W świetle badań Piageta, I klasa szkoły ponadpodstawowej to za wcześnie na naukę logiki.
- To właśnie nauka dowodzenia porządkuje myślenie logiczne.

Schopenhauer, Erystyka

114. Okropne byłoby sądzić, że logika może mieć korzyść praktyczną i może nauczyć prawidłowego myślenia; wówczas należałoby przypuścić, że ten, kto się jeszcze nie uczył logiki, znajduje się w niebezpieczeństwie myślenia zawsze sprzecznie, zgadzania się na to, że pomiędzy tezami przeciwnymi możliwa jest trzecia, lub też przyznania słuszności wnioskowi w rodzaju takiego, jak następujący:

115. Wszystkie gęsi mają dwie nogi;
Cajus ma dwie nogi —
Cajus jest gęsią.

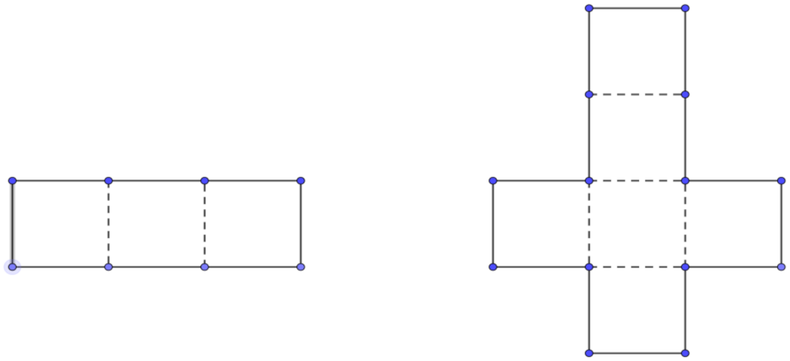
118. Należałoby wówczas sądzić, że dopiero z logiki człowiek dowiaduje się, że w ten sposób myśleć i wyprowadzać wniosków nie wolno.

Nie taki dowód straszny, jak go malują

- Tomek ma 15 zł. Czy może kupić 3 długopisy po 6 złotych każdy?
- Odpowiedź. Nie, **dlatego, że** $\mathbf{3 \cdot 6 > 15}$.
- Jest to jeden z pierwszych dowodów matematycznych.

Przykład 1.

Czy z dwóch klocków o takim kształcie jak pierwszy, można ułożyć taki kształt jak drugi?

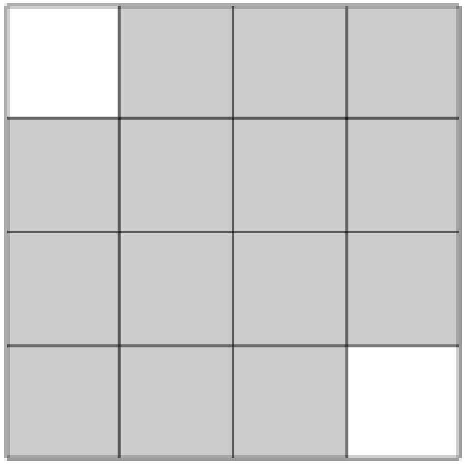


Przykład 2.

Z kwadratowej planszy o wymiarach 4 x 4 usunięto przeciwległe kwadraty, jak na rysunku. Czy da się ją pokryć prostokątami o wymiarach 2 x 1?

Co jeśli wymiary planszy są:

a) 3 x 3,
b) 5 x 5,
c) 6 x 6 ?



Formalizm

- Dowodzenia uczymy od najmłodszych lat.
- Zwiększa złożoność.
- Zwiększa się poziom formalizmu.
- Metoda “napisz tak, aby kolega zrozumiał”.

Warunki realizacji

Dowody.

Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija takie umiejętności, jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów.

Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód.

Umiejętność formułowania poprawnych rozumowań i uzasadnień jest ważna również poza matematyką.

Przykład 3.

Udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną, to liczba $n^2 + 3n + 5$ nie jest podzielna przez 121 .

Trudne jak na zakres podstawowy

Rozwiązanie.

Zapisujemy $n^2 + 3n + 5 = (n-4)(n+7) + 33$.

Jeśli 121 dzieli $n^2 + 3n + 5$, to 11 dzieli $(n-4)(n+7)$.

11 jest liczbą pierwszą, więc 11 dzieli albo $(n-4)$ albo dzieli $(n+7)$.

Ale $(n+7) - (n-4) = 11$. Zatem 11 dzieli $(n-4)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli $(n+7)$.

To oznacza, że jeśli 11 dzieli $(n-4)(n+7)$, to 121 dzieli $(n-4)(n+7)$.

A to oznacza, że $n^2 + 3n + 5$ przystaje do 33 modulo 121.

Podsumowując, jeśli 11 dzieli $n^2 + 3n + 5$, to $n^2 + 3n + 5$ przystaje do 33 modulo 121, więc nie dzieli się przez 121.

Wariant zadania.

Wykaż, że liczba $n^2 + 4n + 5$, gdzie n jest całkowite nie dzieli się przez 7.

- Sprowadzamy do postaci kanonicznej: $(n+2)^2 + 1$.
- Dla różnych n , patrzymy na reszty z dzielenia $(n+2)^2$ przez 7:

n	0	1	2	3	4	5	6
$(n+2)^2$	4	9	16	25	36	49	64
$(n+2)^2$ mod 7	4	2	2	4	1	0	1

- Ostatni wiersz tabelki powtarza się cyklicznie. Nigdy nie dostajemy reszty 6, to znaczy, że liczba $(n+2)^2 + 1$ nie dzieli się przez 7.

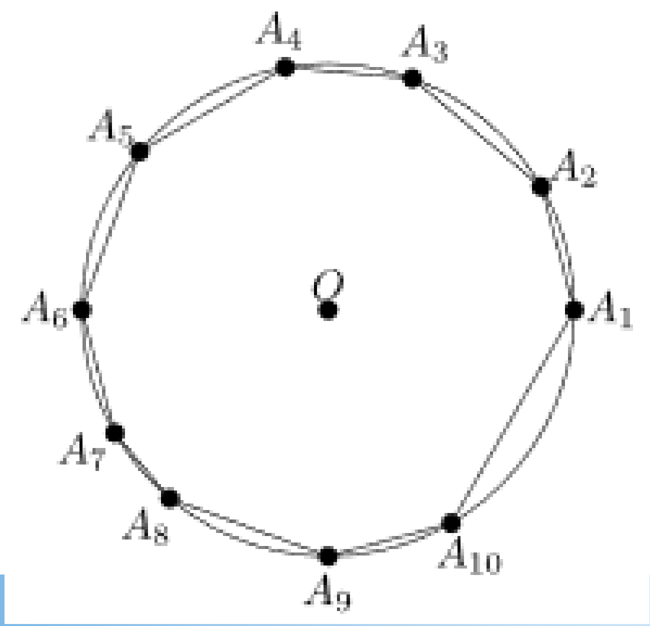
Jedno zadanie, wiele dróg.

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 0} \, .$$

Dowody geometryczne.

Niech $A_1, \dots, A_{2n}$ będą kolejnymi wierzchołkami $2\mathrm{n}$ – kąta wpisanego w okrąg. Wykazać, że suma kątów wewnętrznych o wierzchołkach $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ jest równa sumie kątów wewnętrznych o wierzchołkach $A_2, A_4, \dots, A_{2n}$.

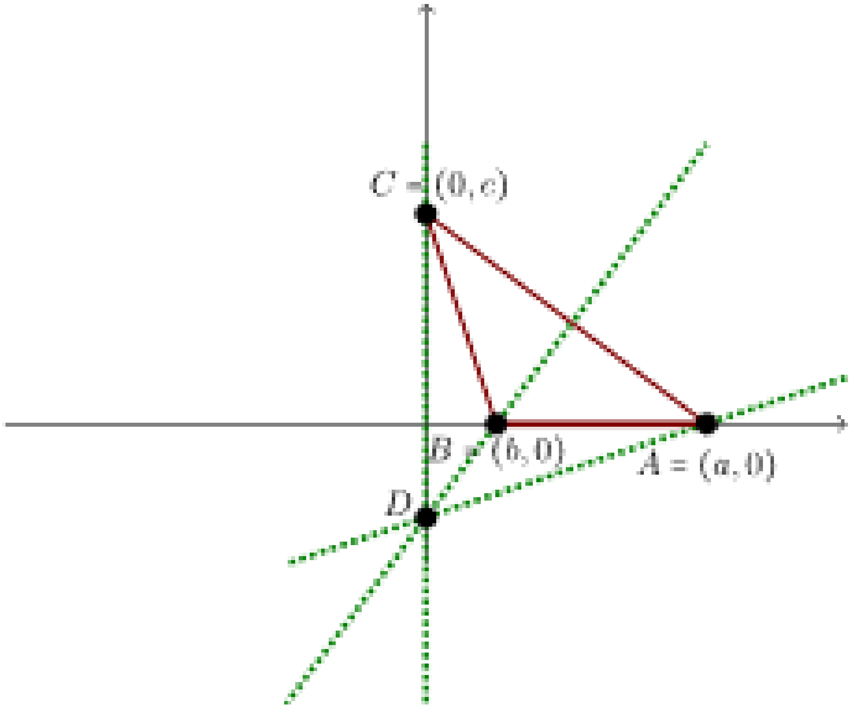


Metody rozwiązań.

- Kąt o wierzchołku A_i jest kątem wpisanym opartym o łuk idący od A_{i+1} do A_{i-1}. Sumujemy…
- Zakładamy, że środek okręgu O znajduje się wewnątrz wielokąta. Trójkąty OA_iA_{i+1} są równoramienne. Oznaczamy przez a_i kąty przy podstawie…
- … inne metody?

Wysokości trójkąta.

- Udowodnić, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Wysokości trójkąta.

- Zadanie dodatkowe: użyć metod geometrii analitycznej.
- Uproszczenie: trójkąt ma wierzchołki $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (0, c)$, oraz $a > b$.

Rozwiązanie.

Współczynnik kierunkowy prostej AC wynosi $-\frac{c}{a}$.

Współczynnik kierunkowy wysokości wynosi $\frac{a}{c}$.

Współczynnik kierunkowy prostej BC wynosi $-\frac{c}{b}$, a więc współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość wynosi $\frac{b}{a}$.

Rozwiązanie cd.

Proste zawierające wysokości mają postać:

$$\mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}), \qquad \mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}).$$

Z warunku, że pierwsza prosta przechodzi przez $\mathrm{B} = (b, 0)$ wynika, że $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{b}$, $\mathbf{e} = -\boldsymbol{a}$.

Punkt wspólny tych prostych ma pierwszą współrzędną spełniającą równanie $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, czyli $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Więc leży na prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka C.

Prezentację lub jej fragmenty można wykorzystać:

- w pracy zespołu przedmiotowego,
- w przygotowaniu zajęć różnego typu dla uczniów starszych klas szkoły podstawowej,
- w przygotowaniu zajęć dla uczniów klas pierwszych szkół ponadpodstawowych,
- podczas zajęć przygotowujących do egzaminów zewnętrznych.

Proszę o uwagi i komentarze

Piotr Darmas
piotr.darmas@rodon.radom.pl