Spis treści

Wstęp

W roku szkolnym 2010/2011 odbyły się XI Radomskie Zawody Matematyczne. Prezentujemy zestawy zadań wraz z rozwiązaniami przygotowane na I i II etap zawodów.

Uczniowie szkół podstawowych rozwiązywali jeden zestaw zadań.

Dla uczniów gimnazjów przygotowano dwa zestawy. Jeden dla uczniów, którzy realizują program nauczania matematyki w wymiarze 12-14 godzin w całym cyklu kształcenia, a drugi dla uczniów, którzy realizują program nauczania matematyki w zwiększonym wymiarze godzin (15 i więcej) w całym cyklu kształcenia lub uczestniczą w zajęciach kola matematycznego.

Podobnie uczniowie szkół pogimnazjalnych realizujący program nauczania matematyki w zakresie podstawowym mieli inny zestaw zadań niż uczniowie realizujący program nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym.

Zadania wybrano z ogólnie dostępnych podręczników szkolnych oraz zbiorów zadań.

Poniższy materiał opracował zespół, który przygotował i przeprowadził XI Radomskie Zawody Matematyczne:

Piotr Darmas – RODoN, RO SNM, IV LO,

Dorota Kucharczyk – RO SNM, ZSO nr 7 (PG nr 1),

Beata Łuczaj – RO SNM, ZS Samochodowych,

Danuta Pardela - RO SNM, ZS Samochodowych,

Beata Rybińska – RO SNM, PSP nr 23,

Małgorzata Sokołowska – RO SNM, IV LO,

Lidia Wojdała - RO SNM, ZS Samochodowych.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

ZADANIA NA I ETAP

SZKOŁA PODSTAWOWA

05.01.2011r.

Zadanie 1

Jakie cyfry należy wpisać w miejsce x i y, aby liczba siedmiocyfrowa $213x54y$ była podzielna przez 45?

Zadanie 2

Codziennie rano pies Hau i kot Miau biegną myć się nad rzekę. Pies biegnie 10 minut, a kot 20 minut. Po jakim czasie pies dogoni kota, jeśli kot wybiegnie z domu o 5 minut wcześniej?

Zadanie 3

W trójkącie równoramiennym ABC AB = AC. Na boku AB obrano punkt D, a na boku AC obrano punkt E tak, że AE = DB = BC i AD = DE. Oblicz miarę kąta przy wierzchołku A.

Zadanie 4

W 1111 roku Mikołaj Starszy miał 345 lat, a jego syn Mikołaj Młodszy miał 111 lat. W którym roku Mikołaj Starszy będzie dwa razy starszy od Mikołaja Młodszego?

Zadanie 5

Gdy beczka jest w 30% pusta, to zawiera o 30 litrów więcej, niż gdy jest w 30% napełniona. Jaka jest pojemność beczki?

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
SZKOŁA PODSTAWOWA
I - etap
ROZWIĄZANIA

Zadanie1.

Aby liczba była podzielna przez 45 musi być podzielna przez 5 i 9, zatem jej ostatnią cyfrą może być 5 lub 0.

Dla y=0 mamy: 2+1+3+5+4+0=15 więc x=3

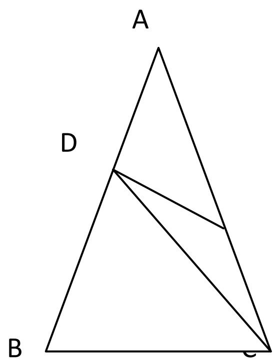
Dla y=5 mamy: 2+1+3+5+4+5=20 więc x=7

Zatem istnieją dwie możliwe pary tych cyfr 3 i 0 oraz 7 i 5.

Zadanie 2.

Kot w czasie 5 minut przebiegnie ¼ drogi, wtedy wyruszy pies. Pies połowę drogi pokonuje w czasie 5 minut, a kot w 10 min. **Pies dogoni kota w połowie drogi po 5 minutach.**

Zadanie 3.



$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}|$, $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{DB}| = |\mathrm{BC}|$, $|AD| = |DE|$

Niech $|\sphericalangle A| = \alpha$. Wtedy $|\sphericalangle B| = 90^o - \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle BDC| = 45^o + \frac{\alpha}{4}$.

Można zauważyć, że $|AD| = |EC|$, $|\sphericalangle AED| = \alpha$.

$|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle ECD| = \frac{\alpha}{2}$, czyli $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle ECD|$.

Stąd $90^o - \frac{\alpha}{2} = 45^o + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}$. **Czyli $\boldsymbol{\alpha = 36^o}$**

Zadanie 4.

Mikołaj Starszy jest starszy od Młodszego o 345 – 111 = 234 lata. Zatem Mikołaj Starszy będzie dwa razy starszy od Młodszego, gdy ten będzie miał 234 lata. **Skoro w 1111 roku Mikołaj Młodszy miał 111 lat, więc 234 lata będzie miał w 1234 roku.**

Zadanie 5.

Beczka w 30% pusta, to beczka w 70% pełna. Zatem 40% zawartości beczki to 30 litrów.

4% zawartości to 3 litry, więc pełna beczka mieści 75 litrów.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH
FINAŁ
02 KWIETNIA 2011

ZADANIE 1

Zegarek spieszy się 5 minut 36 sekund na tydzień. Jeśli w niedzielę w południe pokazuje on dokładny czas, to jaki czas pokaże w piątek o piątej po południu?

ZADANIE 2

Wacek nalał sobie pełną szklankę wody. Wypił $\frac{1}{3}$ szklanki i dolał do pełna soku. Czynność tą powtórzył jeszcze pięciokrotnie. Ostatnią szklankę wypił do dna. Ile szklanek wody i ile szklanek soku wypił Wacek?

ZADANIE 3

Czy istnieje prostokąt, którego długości boków wynoszą odpowiednio $\frac{3}{8}$ i $\frac{2}{17}$ długości obwodu tego prostokąta? Odpowiedź uzasadnij.

ZADANIE 4

Liczba a stanowi 10% liczby b, liczba b stanowi 20% liczby c, liczba c stanowi 30% liczby d, zaś liczba e stanowi 40% liczby d. Oblicz wartość ilorazu a : e.

ZADANIE 5

Drewniany klocek w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $8cm \times 4cm \times 5cm$ pomalowano na zielono, a następnie pocięto na 160 jednakowych sześcianików. Ile sześcianików ma 3 ściany zielone, ile 2 ściany zielone, a ile 1 ścianę zieloną? Ile jest sześcianików, które nie są pomalowane?

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH
FINAŁ
ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Obliczamy ile godzin ma tydzień:

$24 \cdot 7 = 168$

Obliczamy, o ile czasu spieszy się zegarek w ciągu jednej godziny:

$5 \cdot 60 + 36 = 336s$

$336 : 168 = 2s$

Obliczamy różnicę czasu między niedzielą 12.00, a piątkiem 17.00:

$24 \cdot 5 + 5 = 125h$

Nasz zegarek spieszy się o:

$125 \cdot 2 = 250s = 4\min 10s$

Zatem zegarek wskaże godzinę:

17.00 + 4min10s = 17.04.10.

Zadanie 2.

Wyobraźmy sobie, że Wacek najpierw wlewa wszystko, co miał wypić do jednego dużego garnka, a dopiero potem wypija całą zawartość. W efekcie w garnku będzie dokładnie taka zawartość soku i wody, jaką wypił ze szklanki w całym procesie.

Co będzie w garnku?

Wacek najpierw wlewa 1 szklankę wody do umownego garnka. Następnie wlewa do garnka sześciokrotnie 1/3 szklanki soku. Zatem w garnku mamy 1 szklankę wody i 2 szklanki soku, a zawartość garnka – jak już zauważono – to jest właśnie to, co wypił Wacek.

Wacek wypił 1 szklankę wody i 2 szklanki soku.

Zadanie 3.

$Obw. = 2 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{2}{17} = \frac{6}{8} + \frac{4}{17} = \frac{3}{4} + \frac{4}{17} = \frac{51}{68} + \frac{16}{68} = \frac{67}{68} \neq 1$

Zatem taki prostokąt nie istnieje.

Zadanie 4.

$a = 10\%b$, $b = 20\%c$, $c = 30\%d$, $d = 40\%e$.

Zatem $a = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4e$.

Stąd $\boldsymbol{\frac{a}{e} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0024.}$

Zadanie 5.

Trzy ściany zielone są tylko w sześcianikach znajdujących się w wierzchołkach klocka, czyli jest ich 8.

Dwie ściany zielone są w sześcianikach położonych wzdłuż krawędzi klocka (oprócz wierzchołków), czyli $4 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 44$.

Jedną ścianę zieloną mają sześcianiki położone na środku każdej ze ścian klocka, czyli

$2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 3 = 72$.

Wszystkie ściany niepomalowane mają pozostałe sześcianiki, czyli $\boldsymbol{160 - 8 - 44 - 72 = 36.}$

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

ZADANIA NA I ETAP

GIMNAZJUM - WERSJA A (łatwiejsza)

05.01.2011r.

Zadanie 1

Znajdź wszystkie dwucyfrowe liczby o własności: „ jeżeli do liczby dodamy liczbę utworzoną z przestawienia jej cyfr, to otrzymamy sumę, która będzie kwadratem liczby naturalnej”.

Zadanie 2

W trapezie ABCD: bok AD jest równoległy do boku BC, przekątna BD ma 20 cm, bok CD ma 15 cm, bok BC ma 10 cm, kąt ABD jest równy kątowi BCD. Oblicz długości boków AB i AD.

Zadanie 3

Z miast A i B odległych o 35km wyjeżdżają jednocześnie dwaj rowerzyści. Jaka jest prędkość każdego z nich, jeśli miną się po 1 godzinie i 15 minutach, a prędkość jazdy jednego z nich jest równa $\frac{4}{3}$ prędkości drugiego?

Zadanie 4

Pan Ekologiczny w swoim biznesplanie założył posadzenie 6ha lasu na nieużytkach. Jesienią zasadził las na polu, które ma kształt czworokąta w którym tylko boki 50m i 120m są prostopadłe; a dwa pozostałe boki mają długość 840m i 850m. Czy pan Ekologiczny wykonał założenia planu ?

Zadanie 5

W trzech beczkach czarnej, białej i zielonej było w sumie 64,8 l wody. Zawartość zielonej beczki przelano do dwóch pozostałych tak, że w czarnej beczce ilość wody podwoiła się, a w białej wzrosła o 20%. Następnie wyrównano ilości wody w obu beczkach, przelewając 10 % zawartości czarnej beczki do beczki białej. Oblicz, ile litrów wody było początkowo w każdej z trzech beczek.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW
02 KWIETNIA 2011
FINAŁ A

ZADANIE 1

W deltoidzie przekątne są równe dłuższym bokom. Oblicz sumę kąta utworzonego przez dłuższe boki i kąta utworzonego przez krótsze boki deltoidu.

ZADANIE 2

Suma trzech liczb wynosi 70. Dzieląc drugą przez pierwszą otrzymamy iloraz 2 i resztę 1, a dzieląc trzecią przez drugą otrzymamy iloraz 3 i resztę 3. Wyznacz te liczby.

ZADANIE 3

Pole przekroju graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wyznaczonego przez krawędź podstawy i przekątne dwóch ścian bocznych wynosi $144\sqrt{15}$ cm^2. Oblicz objętość graniastosłupa, jeżeli przekątna ściany bocznej jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.

ZADANIE 4

Turysta w czasie jednej godziny przechodzi określoną liczbę kilometrów podczas kilkugodzinnej wycieczki. Gdyby turysta w czasie każdej godziny przeszedł o 1 km mniej, to wycieczka trwałaby 2 godziny dłużej. Gdyby turysta w czasie każdej godziny przeszedł o 2 km więcej, to wycieczka trwałaby 2 godziny krócej. Z jaka prędkością szedł turysta? Ile godzin trwała wycieczka?

ZADANIE 5

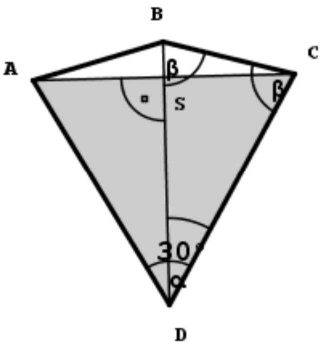
Obwód działki w kształcie trapezu równoramiennego wynosi 560 m. Stosunek długości podstaw trapezu wynosi 1: 2, a stosunek długości ramienia do wysokości wynosi 5: 4. Właściciel chce zmienić kształt działki na kwadratowy o tym samym polu. Jaka długość będzie miał bok tego kwadratu?

Radomskie Zawody Matematyczne

Finał Gimnazjum A

ROZWIĄZANIA

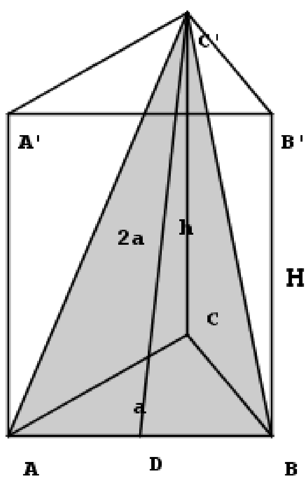
ZADANIE 1.



ZADANIE 2.

Szukane liczby to 7, 15 i 48.

ZADANIE 3.



Rysunek z oznaczeniami,

Zastosowanie tw. Pitagorasa do

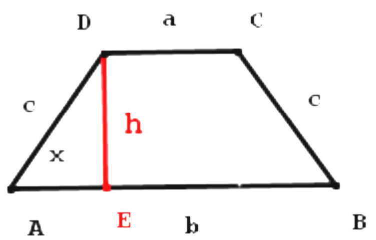
Z prostokątnego

ZADANIE 4.

Ułożenie jednego równania np.:

Turysta poruszał się z prędkością 4km/h, wycieczka trwała 6 godzin.

ZADANIE 5.



Wyznaczenie długości podstaw i wysokości trapezu

$a = \frac{3}{2}h; \quad b = 3h; \;\; c = \frac{5}{4}h \quad zatem$

$\frac{3}{2}h + 3h + 2 \cdot \left(\frac{5}{4}h\right) = 56$

$\mathrm{h = 8m}$

$\mathrm{a = 12m; \quad b = 24m}$

$$P = \frac{1}{2}(12 + 24) \cdot 8$$

$$P = 144\, m^2$$

$$y{:}\ bok\ kwadratu$$

$$y^2 = 144$$

$$\boldsymbol{y = 12m}$$

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

ZADANIA NA I ETAP

GIMNAZJUM

WERSJA B (trudniejsza)

05.01.2011r.

Zadanie 1

(Zadanie Metodora – greckiego matematyka z III w. p.n.e.) Królewska korona ma masę 60 min (mina – grecka jednostka masy) i jest zrobiona ze złota, miedzi, ołowiu i żelaza. Złoto razem z miedzią stanowią $\frac{2}{3}$ masy korony, złoto z ołowiem $\frac{3}{4}$ masy, a żelazo ze złotem $\frac{3}{5}$ masy. Ile każdego materiału zawiera korona?

Zadanie 2

7 jest pierwszą cyfrą liczby czterocyfrowej. Jeżeli 7 przestawimy na ostatnie miejsce, to liczba zmniejszy się o 864. Znajdź tę liczbę.

Zadanie 3

W trójkącie ABC na boku BC odmierzono odcinek CE = $\frac{2}{3}$ AC, a na boku AC odmierzono odcinek CD = $\frac{2}{3}$ BC. Punkty D i E połączono odcinkiem. Znajdź długość odcinka DE, jeśli AB – DE = 15 cm.

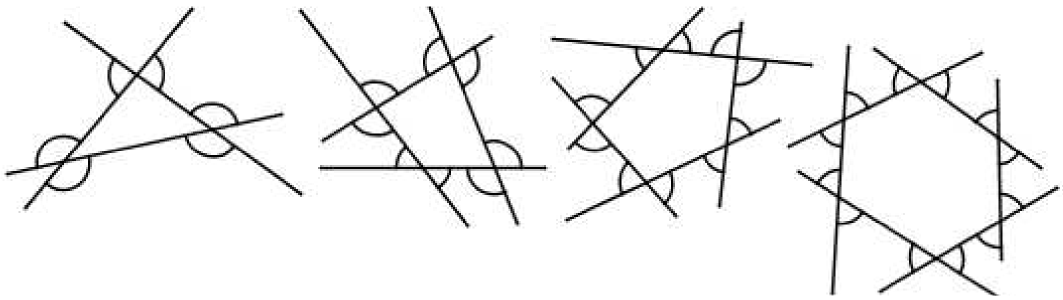
Zadanie 4

Jacek zobaczył z okien pociągu, którym jechał, pociąg towarowy jadący w przeciwnym kierunku. Obliczył, że czas mijania się pociągów wynosi

5 sekund. Jak długi był pociąg towarowy, jeżeli jego prędkość wynosiła 80 km/h, a prędkość pociągu osobowego wynosiła 100km/h?

Zadanie 5

W każdym z wielokątów oblicz sumę miar kątów zaznaczonych łukami.
(Są to kąty zewnętrzne)



Jeżeli zauważyłeś pewną zależność, zapisz ją w formie twierdzenia i udowodnij.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
GIMNAZJUM
WERSJA B (zakres rozszerzony)

ZADANIE 1

x - złoto w koronie
y - miedź w koronie
z - ołów w koronie
t - żelazo w koronie

$$\begin{cases} x+y+z+t=60 \\ x+y=\frac{2}{3}\cdot 60=40 \\ x+z=\frac{3}{4}\cdot 60=45 \\ x+t=\frac{3}{5}\cdot 60=36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z+t=60 \\ y=40-x \\ z=45-x \\ t=36-x \end{cases}$$

x + 40 – x + 45 – x + 36 – x = 60
-2x = - 61

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=30,5} \\ \boldsymbol{y=9,5} \\ \boldsymbol{z=14,5} \\ \boldsymbol{t=5,5} \end{cases}$$

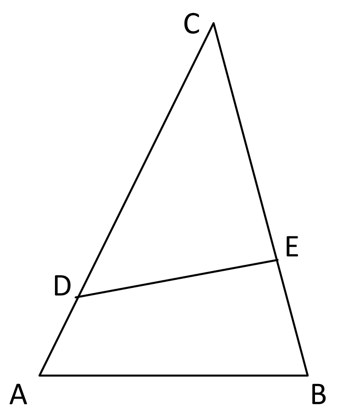
ZADANIE 2

I liczba czterocyfrowa - 7·1000 + 100·x + 10·y + z
II liczba czterocyfrowa - 1000·x + 100·y + 10·z + 7

1000x + 100y + 10z + 7 + 864 = 7000 + 100x + 10y + z
900x + 90y + 9z = 6129
100x + 10y + z = 681

Stąd: $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \\ z=1 \end{cases}$. **Szukaną liczbą jest 7681**

ZADANIE 3



$|CE|=\frac{2}{3}|AC| \qquad |CD|=\frac{2}{3}|BC|$
$|AB|-|DE|=15\ cm$

$\frac{|CE|}{|AC|}=\frac{2}{3}$ i $\frac{|CD|}{|BC|}=\frac{2}{3}$ i $|\sphericalangle DCE|=|\sphericalangle ACB|$,
zatem na mocy cechy podobieństwa trójkątów (bkb)
$\Delta\, ABC \sim \Delta\, EDC$.

Stąd $\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{2}{3}$ - skala podobieństwa
$|AB|=\frac{3|DE|}{2}$
$\frac{3|DE|}{2}-|DE|=15,$ $\qquad \boldsymbol{|DE|=30\ cm}$

ZADANIE 4

$V_1 = 80\frac{km}{h}$ - prędkość pociągu towarowego
$V_2 = 100\frac{km}{h}$ - prędkość pociągu osobowego
$t = 5s$ - czas mijania się pociągów
x - długość pociągu towarowego
Jacek jest obserwatorem z pociągu osobowego, zatem długość x jest sumą $s_1 + s_2$,
gdzie s_1 – droga pociągu towarowego
s_2 – droga pociągu osobowego

$s_1 = V_1 \cdot t$, $s_2 = V_2 \cdot t$ oraz $x = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$

$x = t \cdot (V_1 + V_2)$

$t = 5s = 5 \cdot \frac{1}{3600}h = \frac{1}{720}h$

$\mathbf{x = (80+100) \cdot \frac{1}{720} = \frac{180}{720} = 0,25km = 250m}$

ZADANIE 5

$180^o - \alpha + 180^o - \beta + 180^o - \gamma = 180^o$
$360^o - (\alpha + \beta + \gamma) = 0$
$(\alpha + \beta + \gamma) = 360^o$
$2(\alpha + \beta + \gamma) = 720^o$

$180^o - \alpha + 180^o - \beta + 180^o - \gamma + 180^o - \delta = 360^o$
$360^o - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$
$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^o$
$2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 720^o$

<u>Twierdzenie</u>: Suma kątów zewnętrznych n – kąta wynosi 720^o .

<u>Dowód</u>: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 180^o(n-2)$ - suma kątów wewnętrznych n – kąta

Suma kątów zewnętrznych: $2[(180^o - \alpha_1) + (180^o - \alpha_2) + \cdots + (180^o - \alpha_n)] =$

$= 2 \cdot n \cdot 180^o - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) =$

$= 2 \cdot n \cdot 180^o - 2 \cdot 180^o(n-2) =$

$= 360^o \cdot 2 = 720^o$

c.n.d.

DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW
02 KWIETNIA 2011
FINAŁ B

ZADANIE 1

W okręgu dane są dwie cięciwy o jednakowych długościach, przecinające się pod katem prostym. Punkt przecięcia dzieli każdą z cięciw na odcinki o długościach 8 cm i 6 cm. Wykaż, że końce cięciw są wierzchołkami trapezu równoramiennego i oblicz długość promienia okręgu.

ZADANIE 2

Czarodziejska skarbonka każdej nocy zwiększa liczbę znajdujących się w niej monet. Jeśli wieczorem jest w niej parzysta liczba monet, to skarbonka dodaje jedna monetę, jeżeli zaś nieparzysta liczba monet, to skarbonka podwaja liczbę monet. Czy można w poniedziałek wieczorem wrzucić do pustej skarbonki taką liczbę monet, aby w najbliższy piątek rano były w niej 83 monety? Przez ten czas nie wrzucamy i nie wyjmujemy monet.

ZADANIE 3

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość c, a jeden z kątów ma miarę 30^o. Wyznacz promień okręgu o środku w wierzchołku kąta 30^o, który dzieli trójkąt na dwie części o równych polach.

ZADANIE 4

Pan Zbyszek jest starszy od pana Mirka. Jeżeli przestawimy obie cyfry liczby całkowitej wyrażającej wiek Zbyszka, to otrzymamy wiek Mirka. Różnica kwadratów liczb wyrażających wiek każdego z panów jest kwadratem liczby całkowitej. Ile lat ma pan Zbyszek, a ile pan Mirek?

ZADANIE 5

Karawana o długości 1 km idzie z prędkością 4 km/h. Od czoła karawany do jej końca i z powrotem biegł pies z prędkością 6 km/h. Jaką drogę przebiegł pies i w jakim czasie?

Radomskie Zawody Matematyczne
Finał Gimnazjum B
2.04.2011

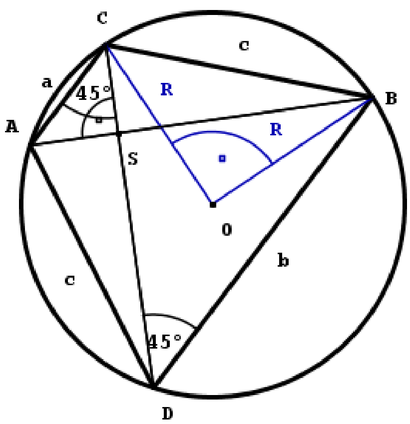
ZADANIE 1.

$S = AB \cap CD$
$AS = SC = 6cm$
$DS = SB = 8cm$

Teza:

ACBD – trapez równoramienny
Wystarczy wykazać, że:

$AC \parallel BD \quad i \quad AD = BC$



Dowód:

$\Delta ASC\ prostokątny\ i\ równoramienny\ (półkwadrat)$ stąd
$\measuredangle ACS = \measuredangle CAS = 45^o$
$\Delta DSB\ prostokątny\ i\ równoramienny\ (półkwadrat)$ stąd
$\measuredangle BDS = \measuredangle DBS = 45^o$
Punkty C, S, D – współliniowe
Zatem $AC \parallel BD$
$AS = SC \qquad DS = SB \qquad \measuredangle ASD = \measuredangle CSD = 90^o$
Z cechy (bkb) $\Delta ASD \equiv \Delta CSB \implies AD = BC$

ACDB – trapez równoramienny.

$P = \frac{1}{2}pq$
$(przekatne\ czworokata\ przecinają\ sie\ pod\ katem\ prostym)$
$p = q = 6cm + 8cm = 14cm$
$P = \frac{1}{2}14^2 \qquad P = 98cm^2$

$\Delta ASC\ prostokątny\ i\ równoramienny\ (półkwadrat)$
$AS = CS = 6cm \quad zatem\ AC = a = 6\sqrt{2}$
$\Delta DSB\ prostokątny\ i\ równoramienny\ (półkwadrat)$
$DS = BS = 8cm \quad zatem\ BD = b = 8\sqrt{2}$
$\Delta ASD \equiv \Delta CSD\ (bkb) \qquad stąd\ AD = CB = c$
$c^2 = 6^2 + 8^2$
$c = 10cm$
$Obw = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 2 \cdot 10 = 14\sqrt{2} + 20$
$\measuredangle CDB = 45^o \quad kąt\ wpisany$
$\measuredangle COB = 2 \cdot 45^o = 90^o$
$kat\ środkowy\ oparty\ natym\ samym\ łuku\ co\ \measuredangle CDB$
$2R^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R = 5\sqrt{2}cm}$

ZADANIE 2.

Uczeń analizuje jak zachowuje się skarbonka dla konkretnej liczby parzystej i nieparzystej np.:

PN		*WT*		*ŚR*		*CZ*		*PT*
1	*2	***2***	+1	***3***	*2	***6***	+1	***7***
2	+1	***3***	*2	***6***	+1	***7***	*2	***14***

Uczeń zauważa, że należy rozpatrzeć dwa przypadki – wkładamy do skarbonki parzysta liczbę monet; nieparzysta liczbę monet.
$\boldsymbol{k \in N}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$

PN		***WT***		***ŚR***		***CZ***		***PT***
2k+1	*2	***2(2k+1)***	+1	***2(2k+1)+1***	*2	***2[2(2k+1)+1]***	+1	***2[2(2k+1)+1]+1***
2k	+1	***2k+1***	*2	***2(2k+1)***	+1	***2(2k+1)+1***	*2	***2[2(2k+1)+1]***

Lub

PN		***WT***		***ŚR***		***CZ***		***PT***
2k+1	*2	***4k+2***	+1	***4k+3***	*2	***8k+6***	+1	***8k+7***
2k	+1	***2k+1***	*2	***4k+2***	+1	***4k+3***	*2	***8k+6***

$dla\ nieparzystych$ $dla\ parzystych$

$2[2(2k+1)+1]+1=83$ $2[2(2k+1)+1]=83$

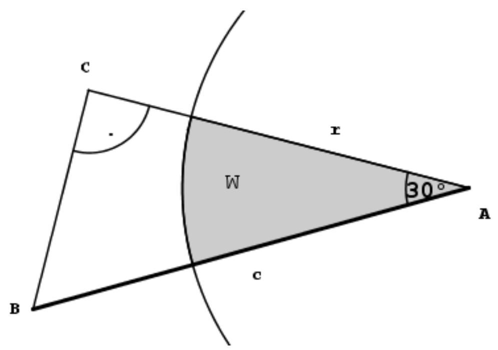
$8k+7=83$ *8k+6=83*

$8k=76$ $8k=77$

$k=9\frac{1}{2}\notin N$ $k=9\frac{5}{8}\notin N$

Nie da się wrzucić w poniedziałek wieczorem takiej liczby monet, aby w piątek było w skarbonce dokładnie 83 monety.

ZADANIE 3.



$\Delta ACB - prostokątny$
$o\ katach\ ostrych\ 30^o i\ 60^o$

$$BC=\frac{1}{2}c$$
$$AC=\frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\Delta ACB}=\frac{c^2\sqrt{3}}{8} \qquad P_W=\frac{30}{360}\pi r^2$$

$$\frac{1}{2}P_{\Delta ACB}=P_w$$
$$\frac{c^2\sqrt{3}}{16}=\frac{\pi r^2}{12}$$
$$r^2=\frac{3c^2\sqrt{3}}{4\pi}$$
$$\boldsymbol{r=\frac{c\sqrt{3\pi\sqrt{3}}}{2\pi}}$$

ZADANIE 4.

$x - cyfra\ dziesiątek\ w\ wiku\ Zbyszk$ $x,y\in\{1,2,3,\dots,9\}$
$y - cyfra\ jedności\ w\ wiku\ Zbyszka$
$10x+y - wiek\ Zbyszka$
$10y+x - wiek\ Mirka$

$10x + y > 10y + x \quad \Longrightarrow \quad x > y$

$$(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = n^2 \qquad n \in C$$
$$99x^2 - 99y^2 = n^2$$
$$99(x + y)(x - y) = n^2$$
$$\mathbf{3^2 \cdot 11(x + y)(x - y) = n^2}$$

Ta równość będzie prawdziwa w liczbach całkowitych jeżeli
$x + y = 11 \ \ i \ \ x - y$ *będzie kwadratem liczby całkowitej*
lub
$x - y = 11 -$ *sprzeczne z założeniem, że* x, y *to cyfry*

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7{,}5 \\ y = 3{,}5 \end{cases} \ \textit{sprzeczne z warunkami zadania}$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases} \ \textit{sprzeczne z warunkami zadania}$$

Zatem $\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$

Zbyszek ma 65 lat, a Mirek 56.

ZADANIE 5.

Uczeń zauważa, że należy rozpatrywać dwie sytuacje:
1) pies i karawana poruszają się w przeciwnych kierunkach
2) pies i karawana poruszają się w tym samym kierunku
Wyznaczenie prędkości psa względem karawany
1) pies i karawana poruszają się w przeciwnych kierunkach
Prędkość psa względem karawan $v_1 = v_p + v_k \qquad v_1 = 10\, {}^{km}/_{h}$
2) pies i karawana poruszają się w tym samym kierunku
Prędkość psa względem karawan $v_2 = v_p - v_k \qquad v_2 = 2\, {}^{km}/_{h}$
Wyznaczenie czasu:
w jakim pies dobiegnie od początku do końca karawany:
$t_1 = \frac{1\,km}{10 {}^{km}/_{h}} \qquad t_1 = 0{,}1h$
w jakim pies dobiegnie od końca do początku karawany
$t_2 = \frac{1\,km}{2 {}^{km}/_{h}} \qquad t_2 = 0{,}5h$

$$t = t_1 + t_2 \qquad t = 0{,}6h$$

$$s = 6\, {}^{km}/_{h} \cdot 0{,}6h$$
$$s = 3{,}6km$$

Pies przebiegnie 3,6 km, w czasie 0,6 h (36 minut).

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
SZKOŁA POGIMNAZJALNA
WERSJA A (zakres podstawowy)
05.01.2011r.

ZADANIE 1

Dwie brygady pracując razem mogą ukończyć pracę w ciągu 12 dni. Po 8 dniach wspólnej pracy, druga brygada, pracując dalej samodzielnie, ukończyła pracę w ciągu 7 dni . W ciągu ilu dni może wykonać pracę każda z brygad , pracując samodzielnie?

ZADANIE 2

Na brzegu jeziora w kształcie koła znajdują się dwie przystanie A i B , położone symetrycznie względem środka tego koła. Rozstrzygnij, która z dróg od przystani A do przystani B jest krótsza: wzdłuż brzegu tego koła czy wzdłuż łamanej na powierzchni koła złożonej z trzech odcinków równej długości, z których każde dwa kolejne są do siebie prostopadłe.

ZADANIE 3

Funkcje $f(x) = ax + 8$ i $g(x) = 3x + b$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi
i $a \in (50, 75)$, przyjmują wartość 2010 dla tego samego argumentu .
Znajdź współczynniki a i b.

ZADANIE 4

Bracia Arek, Bartek i Czesiek złożyli się na kupno roweru, przy czym wkład każdego z nich nie przekraczał średniej arytmetycznej wkładów dwóch pozostałych. Ile pieniędzy dał Arek, jeśli rower ten kosztował 330 zł ?

ZADANIE 5

Dla jakich wartości parametru b jedna z figur ograniczonych osią OX, wykresem funkcji $f(x) = |x-2| + b$ oraz prostą o równaniu $x = 1$, jest czworokątem o polu 7 ?

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA
WERSJA A (zakres podstawowy)

ZADANIE 1

w_1- wydajność brygady 1
w_2- wydajność brygady 2
p – praca do wykonania

$$(w_1 + w_2) \cdot 8 + w_2 \cdot 7 = p$$
$$\frac{p}{12} \cdot 8 + w_2 \cdot 7 = p$$
$$w_2 \cdot 7 = \frac{1}{3}p$$
$$p = 21w_2$$

$$(w_1 + w_2) \cdot 12 = p$$
$$12w_1 + 12w_2 = 21w_2$$
$$12w_1 = 9w_2$$
$$w_2 = \frac{4}{3}w_1$$
$$p = 21 \cdot \frac{4}{3}w_1 = 28w_1$$

Pierwsza brygada może wykonać pracę w ciągu 21 dni, druga 28 dni.

ZADANIE 2

AB_I - droga wzdłuż brzegu koła
AB_{II} – droga wzdłuż łamanej

$|AB_I| = \pi r \approx 3{,}14r$
$|AB_{II}| = 3x$, gdzie x – długość jednego odcinka, z których złożona jest krzywa

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 = r^2$$
$$\frac{5}{4}x^2 = r^2$$
$$x^2 = \frac{4}{5}r^2$$
$$x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$$
$$|AB_{II}| = 3x = 3 \cdot \frac{2r}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}r \approx 2{,}68r$$

Zatem $\boldsymbol{AB_{II} < AB_I}$

ZADANIE 3

$f(x) = g(x) = 2010$

3x + b = 2010
$$x = \frac{2010-b}{3}$$

ax + 8 = 2010
$$x = \frac{2002}{a}$$

$$\frac{2010 - b}{3} = \frac{2002}{a}$$
$$a = \frac{6006}{2010 - b}$$

$6006 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$50 < a = \frac{6006}{y} < 75$; stąd $81 \leq y \leq 120$ oraz y dzieli 6006 .

Zatem $y = 7 \cdot 13 = 91$, 2010 – b = 91 ,

b = 1919 , $\boldsymbol{a = \frac{6006}{91} = 66.}$

ZADANIE 4

Arek – wkład x
Bartek – wkład y
Czesiek – wkład z

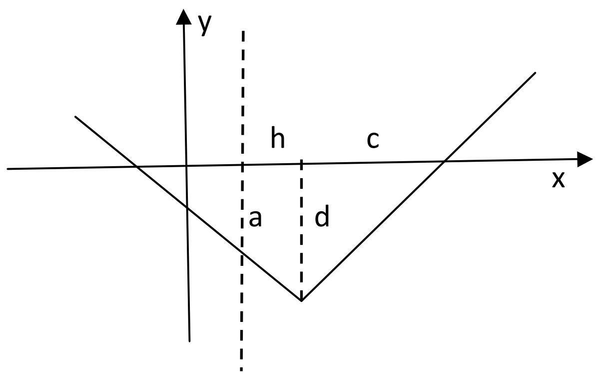
$$\begin{cases} x+y+z=330 \\ x \le \frac{y+z}{2} \\ y \le \frac{x+z}{2} \\ z \le \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

$x = 330 - y - z = 330 - (y+z)$ i $x \le \frac{y+z}{2}$, stąd: $330 - (y+z) \le \frac{y+z}{2}$

$$\frac{y+z}{2} + y + z \ge 330$$
$$\frac{3}{2}(y+z) \ge 330$$
$$y+z \ge 220$$
$$x \le 110$$

Analogicznie $y \le 110$ oraz $z \le 110$.
Jeśli $x \le 110$ i $y \le 110$ i $z \le 110$ i $x+y+z=330$, to x = y = z = 110.
Arek wpłacił 110 zł.

ZADANIE 5



$f(x) = |x+2| + b$
$f(1) = |1-2| + b = 1 + b$, zatem czworokąt powstanie, gdy $1 + b < 0$, $b < -1$
$P_1 = \frac{1}{2}(a+b)h$, $P_2 = \frac{1}{2}dc$, gdzie $d = |f(2)| = |b|$, dla $b < -1$ $d = -b$
$a = |f(1)| = |1+b|$, dla $b < -1$ $a = -1 - b$
$h = 1$
$c = |f(x_0) - f(2)| = |0 - b| = |-b| = -b$
$P_1 = \frac{1}{2}(-1-b-b) \cdot 1 = \frac{-1-2b}{2}$, $P_2 = \frac{1}{2}(-b) \cdot (-b) = \frac{b^2}{2}$

$$\frac{-1-2b}{2} + \frac{b^2}{2} = 7 \ , \ \ b^2 - 2b - 15 = 0 \ , \ \ (b = -3 \; lub \; b = 5) \; i \; b < -1,$$

Stąd b = - 3 .

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ POGIMNAZJALNYCH
02 KWIETNIA 2011
FINAŁ A

ZADANIE 1

Drabina jest umieszczona tak między domami, że jeśli ją pochylić do jednego domu, to sięga na wysokość 12 m, a jeśli do drugiego, to sięga na wysokość 9 m od poziomu ulicy. Oba położenia drabiny są do siebie prostopadłe.
Jaka jest długość drabiny i szerokość ulicy?

ZADANIE 2

Wykaż, że dla każdego $x \in (1,3)$ istnieje trójkąt o bokach: $1, \frac{1}{x}, \frac{2}{x}$.

ZADANIE 3

Wykaż, że liczba sześciocyfrowa utworzona przez napisanie obok siebie trzy razy tej samej dowolnej liczby dwucyfrowej jest podzielna przez 7.

ZADANIE 4

Naszkicuj wykres funkcji f, która każdej wartości parametru p przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania:

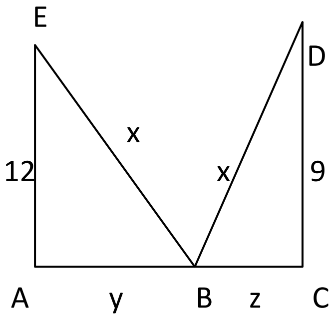
$(3\,|x| - p)(x^2 - p^2) = 0$

ZADANIE 5

Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 18. Jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby objętość bryły powstałej z jego obrotu dookoła podstawy była największa?

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I FINAŁ
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA
WERSJA A (zakres podstawowy)

ZADANIE 1



x - długość drabiny

$|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle CBD| = 90^o$

$|\sphericalangle AEB| = 90^o - |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBD|$

$|\sphericalangle CDB| = 90^o - |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABE|$

Na mocy cechy kkk $\Delta ABE \sim \Delta CDB$

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|CD|}{|BD|} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{9}{x} \quad \Rightarrow \quad y = 9m$$

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|CB|}{|BD|} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{x} = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow \quad z = 12m$$

$$|AC| = x + y = 9 + 12 = 21$$

$$x^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \quad \Rightarrow \quad x = 15m$$

Długość drabiny wynosi 15m, a szerokość ulicy 21m.

ZADANIE 2

$a = 1$, $b = \frac{1}{x}$, $c = \frac{2}{x}$

$a + b > c$	i	$a + c > b$	i	$b + c > a$
$1 + \frac{1}{x} > \frac{2}{x}$		$1 + \frac{2}{x} > \frac{1}{x}$		$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} > 1$
$1 - \frac{1}{x} > 0$		$1 + \frac{1}{x} > 0$		$\frac{3-x}{x} > 0$
$(x-1)x > 0$		$(x+1)x > 0$		$(3-x)x > 0$
$x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$	i	$x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$	i	$x \in (0; 3)$

Zatem nierówność trójkąta spełniona jest dla $\boldsymbol{x \in (1; 3)}$

ZADANIE 3

x - cyfra dziesiątek liczby dwucyfrowej
y - cyfra jedności liczby dwucyfrowej

liczba sześciocyfrowa : $a = x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + x \cdot 10 + y$

$x \in \{1,2, \dots ,9\}$ oraz $y \in \{1,2, \dots ,9\}$

$$a = 10x(10^4 + 10^2 + 1) + y(10^4 + 10^2 + 1) =$$
$$= (10^4 + 10^2 + 1)(10x + y) = 10101(10x + y) =$$
$$= 7 \cdot 1443(10x + y) = 7 \cdot t$$, gdzie $t = 1443(10x + y) \in C$

Ponieważ $\boldsymbol{a = 7t \ i \ t \in C}$, więc a jest podzielna przez 7.

ZADANIE 4

$(3|x|-p)(x^2-p^2)=0$

$3|x|-p=0 \quad lub \quad x^2-p^2=0$

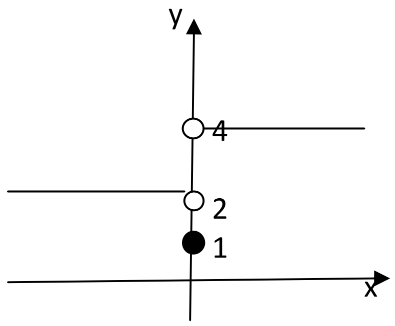
$3|x|=p \qquad (x-p)(x+p)=0$

Dla $p<0$: $3|x|=p$ - sprzeczne oraz $x=p \ lub \ x=-p$

$p=0$: $3|x|=0 \ \Rightarrow \ x=0$ oraz $x=0$

$p>0$: $3|x|=p \ \Rightarrow \ x=\frac{p}{3} \ lub \ x=-\frac{p}{3}$ oraz $x=p \ lub \ x=-p$

Zatem $f(p)=\begin{cases} 1 & dla \quad p=0 \\ 2 & dla \quad p<0 \\ 4 & dla \quad p>0 \end{cases}$



ZADANIE 5

a - długość podstawy trójkąta równoramiennego

b - długość ramienia trójkąta równoramiennego

2b + a = 18 ⇒ a = 18 – 2b

$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h$, gdzie $h=\frac{1}{2}a$, $r=h_\Delta=\sqrt{b^2-(9-b)^2}=\sqrt{18b-81}=3\sqrt{2b-9}$

$V=\frac{2}{3}\pi\cdot 9(2b-9)(9-b)=6\pi(-2b^2+24b-81)$

$V(b)=-12\pi b^2+162\pi b-486$

D: $(\ b>0 \ i \ 9-b>0 \ i \ 2b-9>0) \ \Rightarrow \ b\in\left(\frac{9}{2};9\right)$

Jest to funkcja kwadratowa o współczynniku przy b^2 ujemnym, więc osiąga wartość największa dla $b=\frac{-162\pi}{-24\pi}=6{,}75 \ \in \ D$

Trójkąt o ramionach długości 6,75 i podstawie 4,5.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
SZKOŁA POGIMNAZJALNA
WERSJA B (zakres rozszerzony)
05.01.2011r.

ZADANIE 1

Oblicz sinx – cosx wiedząc, że sinx + cosx = $\frac{2}{3}$

ZADANIE 2

Wyznacz liczby całkowite x i y będące rozwiązaniami równania xy – 2y + x = 5.

ZADANIE 3

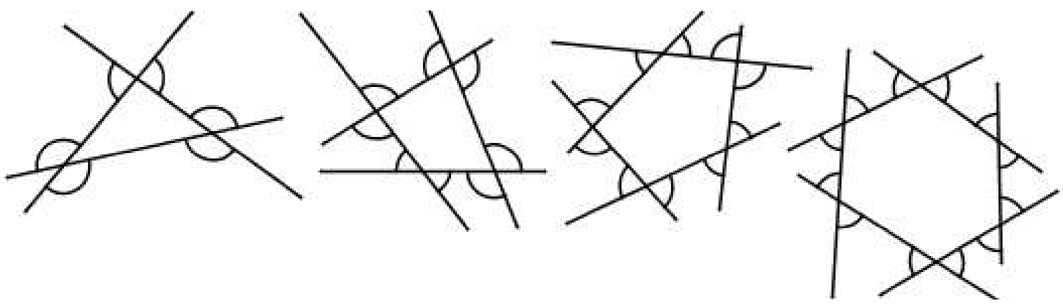
Dany trójkąt równoramienny podzielono na dwie części odcinkiem, którego końce dzielą jedno ramię w stosunku 3:2, a drugie w stosunku 2:3. W wyniku podziału powstał czworokąt, w który można wpisać okrąg. Wiedząc, że podstawa trójkąta ma długość 10, oblicz długość ramienia danego trójkąta.

ZADANIE 4

Dla jakich całkowitych k trójmian $W(x) = k x^2 - (1 - 2k) x + k - 2$
ma pierwiastki wymierne ?

ZADANIE 5

W każdym z wielokątów oblicz sumę miar kątów zaznaczonych łukami.
(Są to kąty zewnętrzne)



Jeżeli zauważyłeś pewną zależność, zapisz ją w formie twierdzenia i udowodnij.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA I ETAP
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA
WERSJA B (zakres rozszerzony)

ZADANIE 1

$sin\alpha + cos\alpha = \frac{2}{3}$

$x^2 = (sin\alpha - cos\alpha)^2 = sin^2\alpha + cos^2\alpha - 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 1 - 2sin\alpha \cdot cos\alpha$

$sin\alpha + cos\alpha = \frac{2}{3}$

$(sin\alpha + cos\alpha)^2 = \frac{4}{9}$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha + 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 1 + 2sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{4}{9}$

$2sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$, zatem $x^2 = \frac{14}{9}$, $x = \frac{\sqrt{14}}{3}$ lub $x = -\frac{\sqrt{14}}{3}$

Stąd: $\boldsymbol{sin\alpha - cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{3}}$ $\boldsymbol{lub}$ $\boldsymbol{sin\alpha - cos\alpha = -\frac{\sqrt{14}}{3}}$

ZADANIE 2

$xy - 2y + x = 5$

$y(x-2) = 5 - x$

$Dla\ x = 2$ mamy: $y \cdot 0 = 5 - 2$, czyli 0 = 3 – sprzeczność

$Dla\ x \neq 2$ mamy: $y = \frac{5-x}{x-2} = \frac{-(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1$

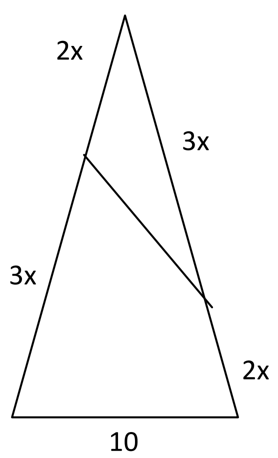
$y \in C \Rightarrow (x-2) \in \{1; -1; 3; -3\}$

$x - 2 = 1$ lub $x - 2 = -1$ lub $x - 2 = 3$ lub $x - 2 = -3$

$\boldsymbol{\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}}$

ZADANIE 3

10 + y = 3x + 2x ; y = 5x – 10 ; 5x – 10 > 0 ; x > 2



$y^2 = 4x^2 + 9x^2 - 12x^2 cos\alpha = 13x^2 - 12x^2$

$100 = 25x^2 + 25x^2 - 50x^2 cos\alpha$

$cos\alpha = \frac{x^2-2}{x^2}$

$(5x - 10) = 13x^2 - 12x^2 \cdot \frac{x^2-2}{x^2}$

$6x^2 - 25x + 19 = 0$

$\left(x = 1 \quad lub \quad x = \frac{19}{6}\right)$ i $x > 2$

Stąd długość ramienia trójkąta: $\boldsymbol{5x = 5 \cdot \frac{19}{6} = \frac{95}{6} = 15\frac{5}{6}}$

ZADANIE 4

W(x) = kx^2 – (1 – 2k)x + k – 2

Δ = (1 – 2k)^2 – 4k(k – 2) = 4k + 1

$\Delta \geq 0 \iff 4k + 1 \geq 0$; $k \geq -\frac{1}{4}$ i $k \in C$

k ; - (1 – 2k) ; k – 2 - współczynniki wymierne

$\left[W(x_0) = 0 \quad i \quad x_0 = \frac{p}{q} \ , \ p, q \in C \quad i \quad q \neq 0\right] \Rightarrow p \ dzieli \ k - 2 \ i \ q \ dzieli \ k$

$x_1 = \frac{1-2k-\sqrt{4k+1}}{2k}$ lub $x_1 = \frac{1-2k+\sqrt{4k+1}}{2k}$ i $\sqrt{4k+1} \in C$

Zatem 4k + 1 jest kwadratem liczby naturalnej.

k = 0 = 0·1 to 1 = 1^2

k = 2 = 1·2 to 9 = 3^2

k = 6 = 2·3 to 25 = 5^2

k = 12 = 3·4 to 49 = 7^2

Dla k postaci m(m+1)

ZADANIE 5

180^o – α + 180^o – β + 180^o – γ = 180^o

360^o – (α + β + γ) = 0

(α + β + γ) = 360^o

2 (α + β + γ) = 720^o

180^o – α + 180^o – β + 180^o – γ + 180^o - δ = 360^o

360^o – (α + β + γ + δ) = 0

(α + β + γ + δ) = 360^o

2 (α + β + γ + δ) = 720^o

Twierdzenie: Suma kątów zewnętrznych n – kąta wynosi 720^o .

Dowód: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ \ldots + \alpha_n = 180^o(n-2)$ - suma kątów wewnętrznych n – kąta

Suma kątów zewnętrznych: $2[(180^o - \alpha_1) + (180^o - \alpha_2) + \cdots + (180^o - \alpha_n)] =$

$= 2 \cdot n \cdot 180^o - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) =$

$= 2 \cdot n \cdot 180^o - 2 \cdot 180^o(n-2) =$

$= 360^o \cdot 2 = 720^o$

c.n.d.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ POGIMNAZJALNYCH
02 KWIETNIA 2011
FINAŁ B

ZADANIE 1

Miara największego kąta w trójkącie jest dwa razy większa od miary jego najmniejszego kąta. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeżeli są one kolejnymi liczbami naturalnymi.

ZADANIE 2

Dane są funkcje w(x) = $|x^3 - 2x^2 - 11x + 12|$ dla x϶R oraz
h(x) = w(x + a) + b. Wyznacz a i b, jeżeli h(7) = 2 i h(x) ≥ 2 dla x϶R.

ZADANIE 3

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest dwa razy większe od pola ściany bocznej. Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

ZADANIE 4

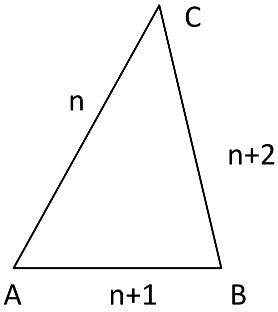
Dany jest zbiór trójkątów prostokątnych leżących w drugiej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych, których przyprostokątne zawarte są w osiach układu współrzędnych. Pole każdego trójkąta jest równe 24. Wyznacz równanie krzywej, utworzonej przez środki przeciwprostokątnych tych trójkątów.

ZADANIE 5

Wyznacz wartości a, p, q, jeżeli funkcja f(x) = $\left|\frac{a}{x-p} + q\right|$ o dziedzinie R –{3} jest rosnąca w przedziale $\langle 2, 3)$, malejąca w przedziałach (- ∞, $2\rangle$, (3,∞)
oraz f(0) = 2.

XI RADOMSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
ZADANIA NA FINAŁ
SZKOŁA PONADGIMNAZJALNA
WERSJA B (zakres rozszerzony)

ZADANIE 1



$|\sphericalangle A| = 2\alpha \qquad oraz \qquad |\sphericalangle B| = \alpha$

Z tw. sinusów: $\frac{n+2}{sin\alpha} = \frac{n}{sin\alpha}$

$$\frac{n+2}{2sin\alpha cos\alpha} = \frac{n}{sin\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{n+2}{2n}$$

Z tw. cosinusów:

$$n^2 = (n+2)^2 + (n+1)^2 - 2(n+2)(n+1)cos\alpha$$
$$0 = n^2 + 6n + 5 - \frac{n^3+5n^2+8n+4}{n}$$
$$0 = n^3 + 6n^2 + 5n - n^3 - 5n^2 - 8n - 4$$
$$0 = n^2 - 3n - 4$$
$$(n = -1 \ lub \ n = 4) \quad i \quad n > 0$$

Zatem trójkąt ma boki długości 4 , 5 , 6.

ZADANIE 2

$w(x) = |x^3 - 2x^2 - 11x + 12| \quad \geq 0$

$h(x) = w(x+a) + b \ \geq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{b = 2}$

$h(7) = 2 \quad \Rightarrow \quad |(7+a)^3 - 2(7+a)^2 - 11(7+a) + 12| + 2 = 2$

$|(7+a)^3 - 2(7+a)^2 - 11(7+a) + 12| = 0$

$(7+a)^3 - 2(7+a)^2 - 11(7+a) + 12 = 0$

Niech $7 + a = t$

$t^3 - 2t^2 - 11t + 12 = 0$

Ponieważ 1 jest pierwiastkiem wielomianu, zatem na mocy twierdzenia Bezou't mamy:

$(t^2 - t - 12)(t - 1) = 0$

$t = -3 \qquad lub \qquad t = 4 \qquad lub \qquad t = 1$

7 + a = -3   7 + a = 4   7 + a = 1

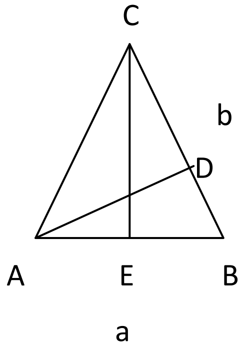
a = - 10   **a = - 3**   **a = - 6**

ZADANIE 3

a – krawędź podstawy ostrosłupa
b – krawędź boczna ostrosłupa
h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa
x – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka przy podstawie trójkąta

$P_p = 2P_{śb}$

$a^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}ah \qquad \Rightarrow \qquad a = h$



$|AD| = x \;,\; |CE| = h$

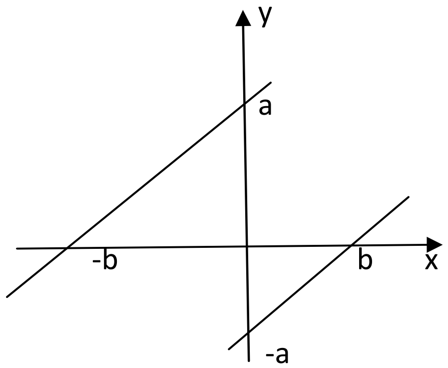
$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{2}b \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$

$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}a}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{2\sqrt{5}a}{5}\right)^2 cos\alpha$

Stąd $\boldsymbol{cos\alpha = -\frac{1}{4}}$

ZADANIE 4



$\frac{1}{2}|ab| = 24$

$|ab| = 48$

$|b| = \frac{48}{|a|}$

$S_1 = \left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}\right) \qquad S_2 = \left(\frac{-b}{2}; \frac{a}{2}\right)$

$x = \frac{b}{2} \;\; ; \;\; y = \frac{-a}{2} \;\; ; \;\; a = -2y$

$x = \frac{48}{2|a|}$ lub $x = \frac{-48}{2|a|}$

$x = \frac{24}{|-2y|}$ lub $x = \frac{-24}{|-2y|}$

$|y| = \frac{12}{x}$ *lub* $|y| = -\frac{12}{x}$

Stąd $\boldsymbol{y = \frac{12}{x}}$ ***lub*** $\boldsymbol{y = \frac{-12}{x}}$

ZADANIE 5

$f(x) = \left|\frac{a}{x-p} + q\right|$

Ponieważ $D = R - \{3\}$, to p = 3 .

Ponadto $f(2) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 0 = \left|\frac{a}{2-3} + q\right| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{-1} + q = 0$

$q = a$

$f(0) = 2 \;\; \Rightarrow \;\; \left|\frac{a}{-3} + q\right| = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = \left|\frac{2}{3}a\right|$

$2 = \frac{2}{3}|a|$

$|a| = 3$

a = 3 lub a = - 3

$\begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{q = 3} \\ \boldsymbol{p = 3} \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} \boldsymbol{a = -3} \\ \boldsymbol{q = -3} \\ \boldsymbol{p = 3} \end{cases}$